ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ
по дисциплине «Математика»

дата 13.11.2024

Тема: «Основные понятия и определения линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений»

1. Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема 3. Основные понятия и методы линейной алгебры

Основные понятия и определения линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений

1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{11}, a_{12},…, a_{mn}, называются ***коэффициентами*** системы или коэффициентами при неизвестных.

Числа b_1, b_2,…, b_m называются свободными членами. Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то ***неоднородной***.

Решением системы (1) называется любая совокупность чисел x_1, x_2, x_3,…,x_n - подстановка которой в (1) обращает каждое уравнение этой системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, имеющая только одно решение ***определенной***, имеющая более одного решения - *неопределенной*, не имеющая ни одного решения - ***несовместной***.

Решить систему (1) - это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

Систему (1) удобно записать в компактной матричной форме $A \cdot X = B$. Здесь А – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из неизвестных x_j, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов b_i.

2. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пусть дана система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Тогда используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ или AX=B $\Rightarrow$ $X = A^{-1}\cdot B$

Это равенство называется ***простейшим матричным уравнением***.

<u>Чтобы решить матричное уравнение, нужно:</u>

1. Найти обратную матрицу A^{-1}.
2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу – столбец свободных членов В, т.е. $A^{-1}B$.
3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример: решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$ представив ее в виде матричного уравнения.

Решение: перепишем систему в виде AX=B, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$.

Найдем A^{-1}: *(алгоритм и пример нахождения обратной матрицы смотрите в конспекте прошлого урока)*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Таким образом $A^{-1} = \dfrac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, x=2, y=3, z=-2

2. Решение линейных систем формулами Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ или в матричной форме A·X=B

Теорема Крамера.

Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное, и это решение находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}$$

Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы замены столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пример:

Решить систему $\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=9, \\ x-2y+2z=3. \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение:

1.Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6+4-1-8+18=13.$

2.Определитель $\Delta \neq 0$. Найдем определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8+18+18-3-36+24=13;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 54+12-6+9-16-27=26;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9+18-16+4-12+54=39.$$

3.Найдем решение системы $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{13}{13}=1; y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{26}{13}=2; z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{39}{13}=3.$

Ответ: (1;2;3)

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru